3) Lineare Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung

Seien gegeben : $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a,\ b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

betrachte $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$ auf I

homogener Fall : $b \equiv 0$

Satz 22.4 :

Seien $x_\circ \in I$, $c_\circ \in \mathbb{R}$. Dann gibt es **genau eine** *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) \ \textit{mit}\ y(x_\circ) = c$$

$$\textit{Es ist} \quad y(x) = \exp\left(\int_{x_\circ}^{x} a(t)\,dt\right) \cdot c_\circ .$$

Beweis :

1) Eindeutigkeit : Satz 22.1!

2) Existenz : leite die Formel ab!

$\square$

Konstruktion von Lösungen im inhomogenen Fall $b \neq 0 \longrightarrow$ "Variation der Konstanten"

Sei φ eine Lösung $\neq 0$ der homogenen Gleichung $y'(x) = a(x)\,y(x)$

(beachte : $\varphi \not\equiv 0 \Longrightarrow \varphi$ ist nirgends $= 0$ nach 22.1).

Bestimmung einer Lösung $\Psi : \ I \to \mathbb{R}$ von

$$(*) \qquad y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$$

durch den

<u>Ansatz</u> : $y(x) = u(x) \cdot \varphi(x)$ (multipliziere φ mit einem von x abhängigen Faktor)

Dann :

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= u'(x) \cdot \varphi(x) + u(x) \cdot \varphi'(x) \\ &= u'(x) \cdot \varphi(x) + u(x) \cdot a(x) \cdot \varphi(x) \\ &\overset{!}{=} a(x) \cdot u(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad u'(x) = b(x) \Big/ \varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad u(x) = \left(\text{Stammfkt. zu } \frac{b}{\varphi}\right) + \text{const}$$

<u>Probe</u> : definiere u durch diese Gleichung und setze $\Psi(x) = u(x)\,\varphi(x) \Longrightarrow \Psi$ löst $(*)$.

Nach 22.1 hat $*$ bei Vorgabe eines Anfangswerte $y(x_\circ) = c_\circ$ höchstens eine Lösung. Beachtet man noch 22.4, also die Formel für φ, so folgt :

Satz 22.5 :

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ seien stetig. Dann gibt es zu jedem $x_\circ \in I$ und jedem $c_\circ \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $\Psi : I \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} y(x_\circ) &= c_\circ \\ y'(x) &= a(x)\, y(x) + b(x) \;\; \textit{auf } I. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi(x) &= \varphi(x)\Big(c_\circ + \int_{x_\circ}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\, dt\Big), \\ \varphi(x) &= \exp\Big(\int_{x_\circ}^{x} a(t)\, dt\Big) \qquad \Big(\Longrightarrow \varphi(x_\circ) = 1\Big) \end{aligned}}$$

Beispiel :

$$y'(x) = 2x \cdot y(x) + x^3, \quad y(0) = c_\circ$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Satz gilt :

$$\varphi(x) = \exp\Big(\int_{x_\circ}^{x} 2t\, dt\Big) = \exp t^2\Big|_{x_\circ}^{x} = e^{x^2}$$

löst für $x_\circ = 0$ das homogene Problem $\varphi' = a\cdot\varphi$, $\varphi(0) = 1$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \Psi(x) &= e^{x^2} \cdot \Big(c_\circ + \underbrace{\int_0^x e^{-t^2} \cdot t^3\, dt}_{\overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+x^2)\, e^{-x^2}}\Big) \\ &= \Big(c + \frac{1}{2}\Big)\, e^{x^2} - \frac{1}{2}\,(1 + x^2). \end{aligned}$$

4) Lineare Systeme 1^{ter} Ordnung

(enthält als Spezialfall lineare Gleichungen n^{ter} Ordnung (via Reduktion)).

4 a) Allgemeiner Fall :

Voraussetzungen :

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $A \in C^\circ(I, \mathbb{R}^n)$, d.h. $A(x) = \Big(a_{ij}(x)\Big)_{1\leq i,j\leq n}$ mit stetigen Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$, $b \in C^\circ(I, \mathbb{R})$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Inhomogenes System :

$$(1) \qquad y'(x) = A(x)\, y(x) + b(x)$$

$$\iff \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Homogenes System :

$$(2) \quad y'(x) = A(x)\, y(x)$$

bemerke : Satz 22.2 $\Longrightarrow$ lokale Existenz von Lösungen.

Wir werden zeigen :

- Lösungen zu (1), (2) existieren nach dem Zusatz zu 22.2 auf ganz I

- vollständige Beschreibung der Lösungsmenge !

Notation :

Differentialoperator

$$L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\circ(I, \mathbb{R}^n),\ L := \tfrac{d}{dx} - A(x),$$

d.h. $L(y)(x) := y'(x) - A(x)\, y(x)$

bemerke :

- L ist ein linearer Operator

- Lösungsmenge des homogenen Systems $=$ Nullraum $N(L)$ von $L \Big(= \{y \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : L(y) = 0\}\Big)$.

Satz 22.6 :

$$\boxed{\dim N(L) \;=\; n}$$

D.h. : *(i)* *Es gibt n linear unabhängige Lösungen des homogenen Problems.*

(ii) *n+1 Lösungen des homogenen Problems sind linear abhängig.*

Wir brauchen ein

Lemma :

Seien $y^1, \ldots, y^n \in N(L)$, $y^i = (y^i_1, \ldots, y^i_n)$

Man setzt $\Delta(x) = \det\Big(y^1(x) \ldots y^n(x)\Big)$ (y^i als Spaltenvektoren)

Dann gilt :

i) $\Delta(x_\circ) = 0$ für ein $x_\circ \iff \Delta \equiv 0$ auf I

ii) $y^1, \ldots, y^n$ linear unabhängig $\iff \Delta$ ist nirgends 0

Beweis (Lemma) :

i) $\qquad \Delta(x_\circ) = 0$ für ein $x_\circ$

$\iff y^1(x_\circ), \ldots, y^n(x_\circ) \in \mathbb{R}^n$ sind linear abhängig

$\iff \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i\, y^i(x_\circ) = 0.$

$y(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, y^i(x)$ löst $L(y) = 0$ auf I.

Aus $y(x_\circ) = 0$ folgt nach 22.1 $y(x) = 0\ \forall\, x \in I$.

Das bedeutet $\Delta(x) = 0$ auf I.

ii) $\qquad \Delta = 0$ für ein $x_\circ$

$\overset{\text{i)}}{\iff} y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, y^i \equiv 0$ auf I mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ nicht alle 0

$\iff y^1, \ldots, y^n$ linear abhängig.

Negation dieser Aussage ergibt ii)

□

Beweis von 22.6 :

i) Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, $x_\circ \in I$ beliebig. Nach 22.2 und der anschließenden Verschärfung, $y'(x) = A(x)\,y(x) =: F(x, y(x))$ mit $|F(x,y) - F(x,\tilde{y})| \leq \|A(x)\| \cdot |y - \tilde{y}|$ (die wir jetzt zum ersten Mal brauchen!), gibt es $y^1, \dots, y^n \in N(L)$ mit $y^i(x_\circ) = e_i$.
Es ist

$$\Delta(x_\circ) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

also $y^1, \dots, y^n$ linear unabhängig.

ii) Seien $y^1, \dots, y^m \in N(L)$ mit $m > n$, $x_\circ \in I$.

$$\Longrightarrow \exists\, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \text{ nicht alle 0 mit } \sum_{i=1}^{m} c_i\, y^i(x_\circ) = 0,$$
da $y^1(x_\circ, \dots, y^m(x_\circ)$ in $\mathbb{R}^n$ linear abhängig sind.

$$y := \sum_{i=1}^{m} c_i\, y^i \text{ gehört zu } N(L) \text{ mit } y(x_\circ) = 0 \overset{22.1}{\Longrightarrow} y \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow y^1, \dots, y^m \text{ linar abhängig.}$$

□

Definition 22.2 :

Eine Basis des Nullraumes von L heißt ein **Fundamentalsystem** *zum homogenen System.*

Bemerkung :

Für die *homogene Gleichung* $\varphi'(x) = a(x)\,\varphi(x)$ haben wir explizite Lösungsformeln, im Fall des Systems $y'(x) = A(x)\,y(x)$ gibt es solche Formeln nur, wenn die Matrix *konstant* ist (s. später).

Beispiel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & -\alpha\, y_2 \\ y_2' & = & \alpha\, y_1 \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Lösungen :

z.B. $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos\ \alpha x \\ \sin\ \alpha x \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin\ \alpha x \\ \cos\ \alpha x \end{pmatrix}$

mit $\det\Big(\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\Big) = \cos^2(\alpha x) + \sin^2(\alpha x) \equiv 1$

$\Longrightarrow$ φ_1, φ_2 bilden Fundamentalsystem

$\longrightarrow$ <u>Übung</u> :

Umformung homogener linearer Gleichungen der Ordnung 2, 3 in Systeme 1^{ter} Ordnung, Fundamentalsysteme?

Wir gehen zurück zum <u>inhomogenen System</u> (1) und bestimmen Lösungen mit <u>Konstantenvariation</u>.

Satz 22.7 :

i) Sei $y^1, \ldots, y^n$ ein Fundamentalsystem zum homogenen System. Die reellen Funktionen $c_1, \ldots, c_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Lösungen von

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y^j(x) = b(x)$$

auf I. Dann ist $y^\circ(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y^i(x)$ Lösung von (1)
(ein sogenannte speziellle Lösung).

ii) Jede Lösung y von (1) hat die Form $y = y^\circ + h$ mit $L(h) = 0$.

Bemerkung :

Da $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ zu jeder Zeit x linear unabhängig sind, werden die Zahlen $c_i'(x)$ durch $(*)$ eindeutig festgelegt. Nun bestimme man Stammfunktionen!

Beweis :

(ii) klar!

(i) Seien die c_i gemäß$(*)$ berechnet

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y^i(x)\Big) &= \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y^i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \frac{d}{dx} y^i(x) \\
&= b(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, A(x)\, y^i(x) \\
&= b(x) + A(x) \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y^i(x)\Big)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung :

Zur Lösung des AWP

$$\begin{aligned}
y(x_\circ) &= \eta \in \mathbb{R}^n \\
y'(x) &= A(x)\, y(x) + b\,(x)
\end{aligned}$$

wähle man ein Fundamentalsystem $y^1, \ldots, y^n$ und berechne eine spezielle Lösung y°; dann setze man

$$y(x) = y^\circ(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y^i(x),$$

wobei die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Lösungen von $y^\circ(x_\circ) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y^i(x_\circ) = \eta$ zu bestimmen sind.

Beispiel :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & -y_2 \\ y_2' & = & y_1 + x \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Die Funktionen $(\cos x, \sin x)$, $(-\sin x, \cos x)$ bilden ein Fundamentalsystem zum homogenen Problem.

Ansatz :

$$c_1'(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Also :

$$c_1'(x) = x \cdot \sin x, \ c_2'(x) = x \cdot \cos x$$

Wähle deshalb

$$c_1(x) = \sin x - x \cdot \cos x, \ c_2(x) = \cos x + x \cdot \sin x.$$

Es folgt dann als spezielle Lösung :

$$y_\circ(x) = (\sin x - x\cos x)\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} + (\cos x + x\cdot\sin x)\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ 1\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x \mapsto \begin{pmatrix}-x\\ 1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

□

4 b) Spezialfall : Lineare Gleichungen höherer Ordnung

Solche Gleichungen lassen sich in Lineare Systeme 1^{ter} Ordnung transformieren, so dass man direkt die Sätze 22.6 und 22.7 anwenden kann. Die hierbei auftretenden Matrizen haben eine sehr spezielle Gestalt.

Notation :

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a_\circ, \ldots, a_{n-1}, b \in C^\circ(I, \mathbb{R}),\ y : I \to \mathbb{R}$

1) homogene Gleichung : $y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x)$

2) inhomogene Gleichung : $y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x) + b(x)$.

Beispiel :

$$y^{(3)}(x) = x^2 \cdot y^{(2)}(x) + e^x \cdot y(x) + \sinh x$$

Satz 22.8 :

(i) Sei $H = \{\varphi \in C^n(I,\mathbb{R}) : \varphi$ *löst (1)* $\}$. *Dann ist* $\dim H = n$.

D.h. : Es gibt n linear unabhängige Lösungen von (1),
$m > n$ *Lösungen sind stets voneinander abhängig.*

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H$ *sind* **genau dann linear unabhängig**,

wenn für ein $x \in I$ *(alle* $x \in I$*) gilt :*

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Man nennt dann $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *ein Fundamentalsystem.*

(ii) Sei $\Psi_\circ$ *eine spezielle Lösung von (2). Dann gilt :*

$$\text{Lösungsmenge von (2)} = \Psi_\circ + H.$$

Beweis :

Mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_\circ(x) & a_1(x) & \dots & \dots & a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\overline{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

betrachte

$$\begin{array}{llcll} (1)^* & Y'(x) & = & A(x)Y(x) & \text{und} \\ (2)^* & Y'(x) & = & A(x)Y(x) + \overline{b}(x) & \end{array}$$

Dann gilt :

$$Y = (y_\circ, \dots, y_{n-1}) \text{ löst } (1)^* \text{ bzw. } (2)^*$$

$$\Longleftrightarrow \quad y_i = y'_{i-1} \text{ für } i \leq n-1 \text{ und } y_\circ \text{ löst } (1) \text{ bzw. } (2).$$

Daraus folgen mit Satz 22.6 und 22.7 alle Aussagen.

$\square$

Bemerkungen :

1) Für die spezielle Lösung $\Psi_\circ$ des inhomogenen Systems macht man den Ansatz

$$c_1(x)\,\varphi_1(x) + \ldots + c_n(x)\,\varphi_n(x) = \Psi_\circ(x)$$

mit einer Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von H. Die Funktionen c_i ergeben sich aus

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) \begin{pmatrix} \varphi_i(x) \\ \varphi_i'(x) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

($\varphi_i^{(j)}$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und $b(x)$ sind Spaltenvektoren)

2) Behandlung des AWP :

Vorgabe von $\varphi(x_\circ), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_\circ)$

$$\Longrightarrow \varphi = \psi_\circ + \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i \varphi_i$$

$\tilde{c}_i$ derart dass AWP erfüllt.

Für lineare Gleichungen der Ordnung $n > 1$ mit *variablen* Koeffizienten gibt es *kein* Patentrezept zur Bestimmung eines Fundamentalsystems, dasgleiche gilt für Systeme mit variabler Koeffizientenmatrix. Aussagen sind manchmal für Gleichungen 2^{ter} Ordnung möglich. Hier gilt : *Hat man eine nichttriviale Lösung φ_1 des homogenen Problems bestimmt, so läßt sich diese zu einem Fundamentalsystem ergänzen.*

Satz 22.9 :

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a,\ b \in C^\circ(I, \mathbb{R})$ und $\varphi :\ I \to \mathbb{R}$ sei Lösung von

$$(*) \qquad y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0$$

Auf dem Intervall $J \subset I$ sei φ **ohne** *Nullstelle.*

Ist dann u eine **nicht-konstante** *Lösung der Gleichung.*

$$(**) \qquad u''(x) + \Big(2 \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x)\Big) \cdot u'(x) = 0$$

(Lösung davon s. später)

auf J, so ist

$$\Psi : J \to \mathbb{R},\ \Psi := u \cdot \varphi,$$

eine **von φ unabhängige Lösung**, *d.h. $\{\varphi, \Psi\}$ ist ein Fundamentalsystem auf J.*

Beweis :

Man setzt $\Psi = \varphi \cdot u$

$$\Longrightarrow \quad \Psi' = \varphi' u + u' \varphi \text{ und } \Psi'' = \varphi'' u + u'' \varphi + 2u'\, \varphi';$$

benutze $(*)$ für φ

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \Psi'' + a\cdot\Psi' + b\,\Psi \;&=\; \underbrace{\Big[-u\overbrace{(a\varphi' + b\,\varphi)}^{\overset{(*)}{=}-\varphi''} + u''\varphi + 2u'\,\varphi'\Big]}_{=\Psi''} \\
&\quad + a\,\underbrace{(\varphi' u + u'\varphi)}_{=\Psi'} + b\,u\,\varphi \\
&= u''\cdot\varphi + au'\varphi + 2u'\varphi' \\
&= \varphi\left[u'' + u'\left(a + 2\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right)\right]
\end{aligned}$$

Ergebnis :

Ψ löst $(*)$ $\iff$ $[\ldots] = 0$ $\iff$ u erfüllt $(**)$.

Probe der Linearen Unabhängigkeit :

$$\det\begin{pmatrix} \varphi & u\cdot\varphi \\ \varphi' & u'\varphi + \varphi' u \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \varphi^2\cdot u' + \varphi'\varphi u - u\varphi\varphi' = 0$$

$$\iff u'\cdot\varphi^2 = 0$$

$$\overset{\varphi^2>0}{\iff} u' = 0$$

$$\iff u = \text{const.}$$

u wird aber als nicht-konstant angenommen.

$\square$

Bemerkung : zu Differentialgleichung $(**)$:

$(**)$ tritt als zusätzliche Differentialgleichung bei der Anwendung des Verfahrens auf. Diese Gleichung läßt sich aber